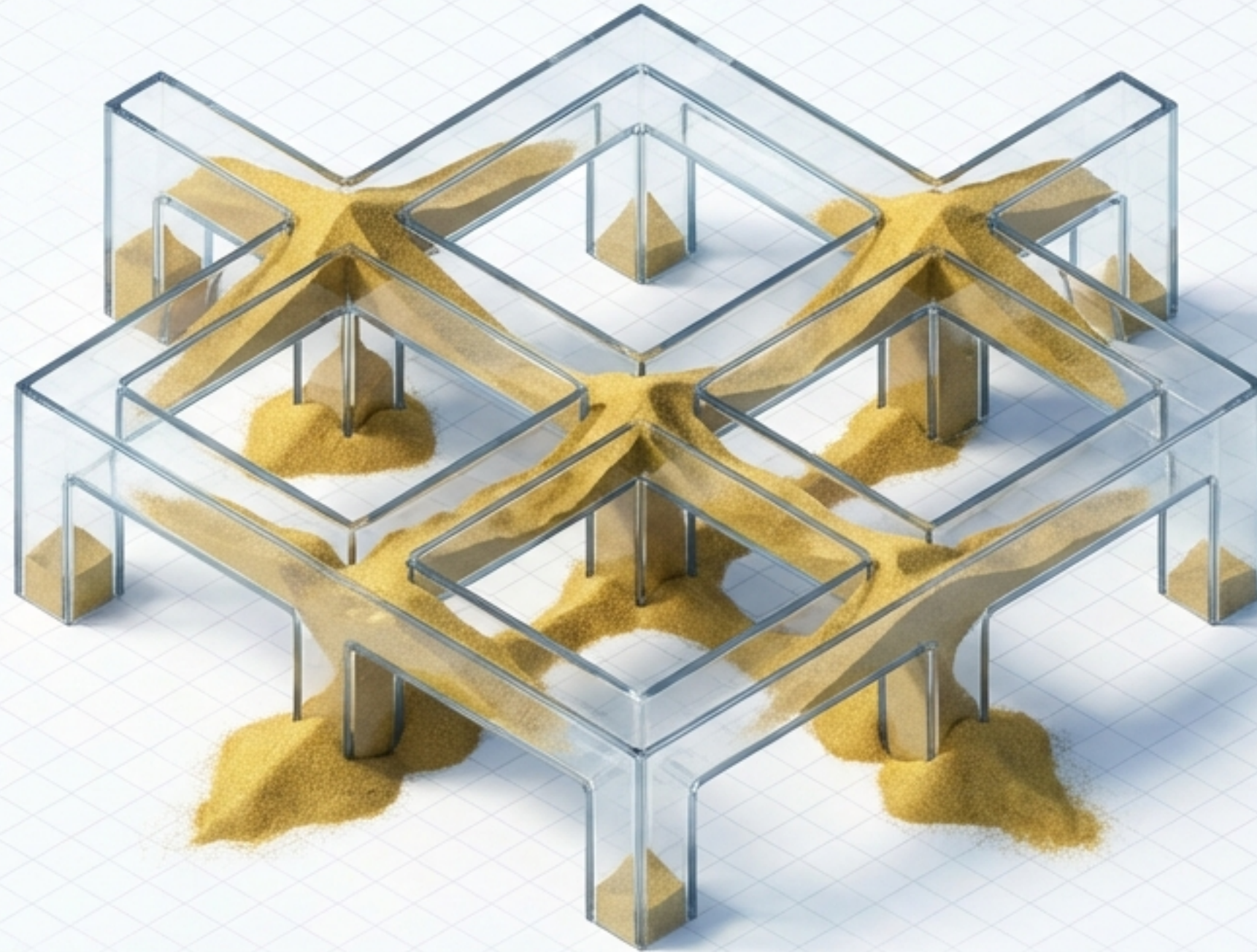


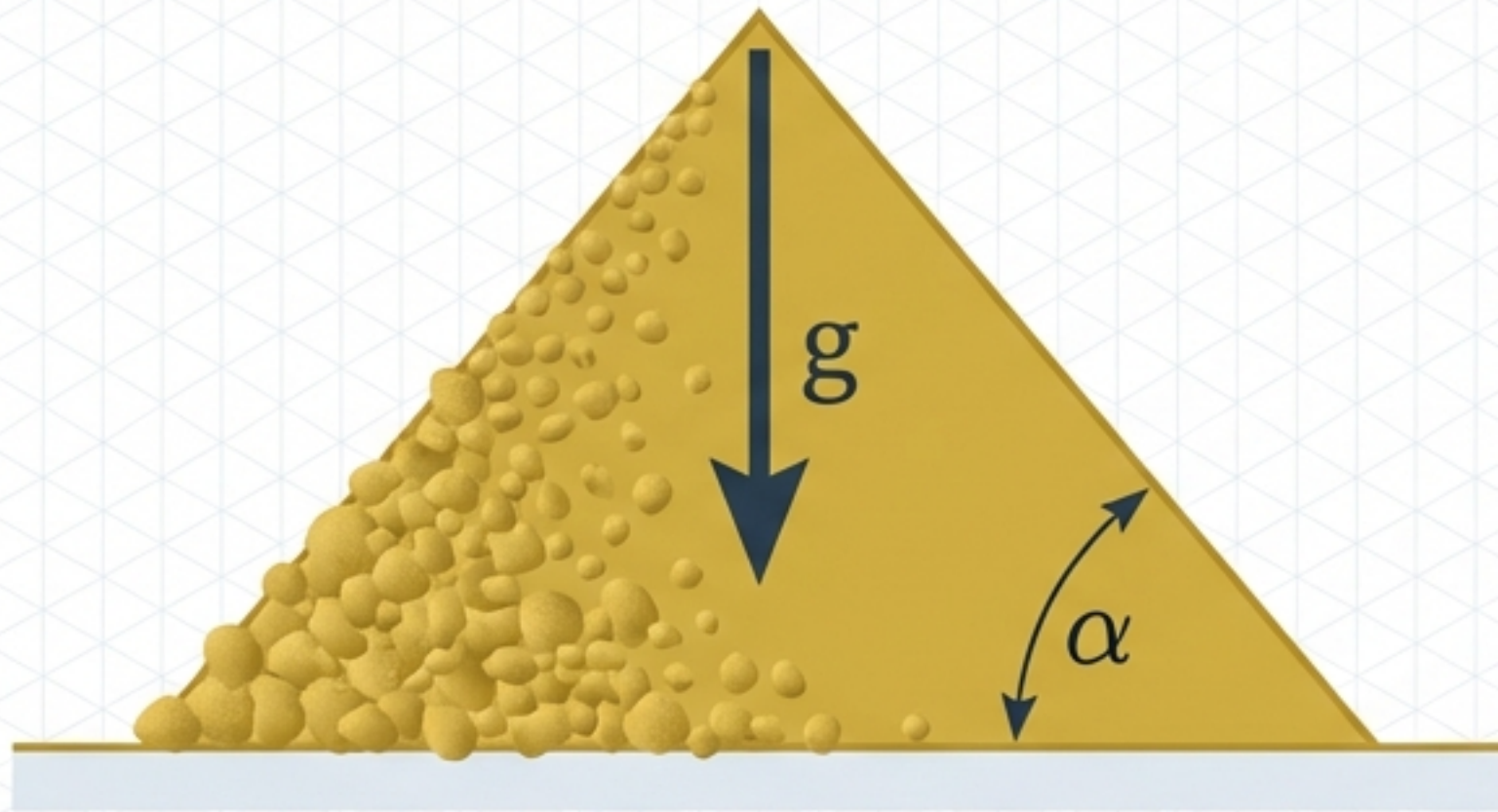


Viskositätslösungen auf verzweigten Räumen

Von granularer Materie zu Hamilton-Jacobi-Gleichungen

Basierend auf der Dissertation von Dirk Schieborn (2006)

Die physikalische Intuition: Das Sandhaufen-Modell



$$|Du(x)| = 1$$

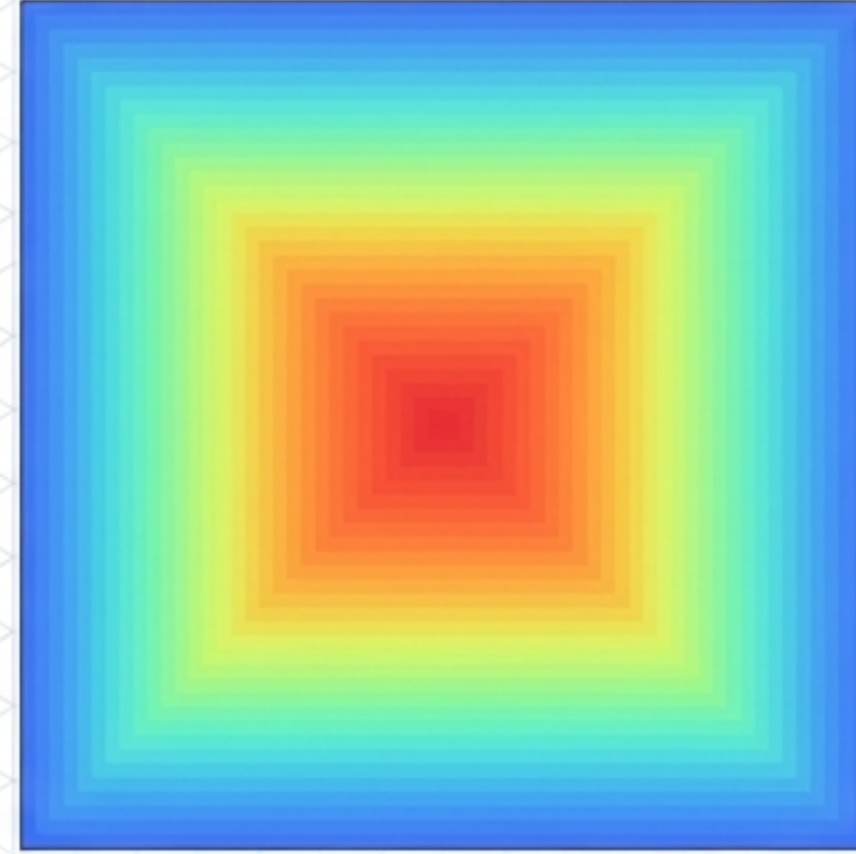
Wenn man trockenen Sand auf eine ebene Fläche schüttet, bildet sich ein Kegel. Die lokale Steigung überschreitet dabei nie einen materialspezifischen Böschungswinkel α .

Mathematisch wird dies durch die **Eikonalgleichung** beschrieben:

$$|Du(x)| = 1 \text{ (normiert)}$$

Dies ist der einfachste Fall einer Hamilton-Jacobi-Gleichung erster Ordnung.

Das Optimierungsprinzip und die Distanzfunktion



Die stabile Form des Sandhaufens folgt einem Variationsprinzip: Sie maximiert das Volumen unter der Nebenbedingung der Steigung $|Du| \leq 1$.

Die Erkenntnis: Die 'Lösung' dieses physikalischen Problems entspricht exakt der Distanzfunktion zum Rand des Gebiets ($d(x, \partial\Omega)$). Auf unverzweigten Gebieten ist dies die eindeutige Viskositätslösung.

Der Übergang zu verzweigten Räumen

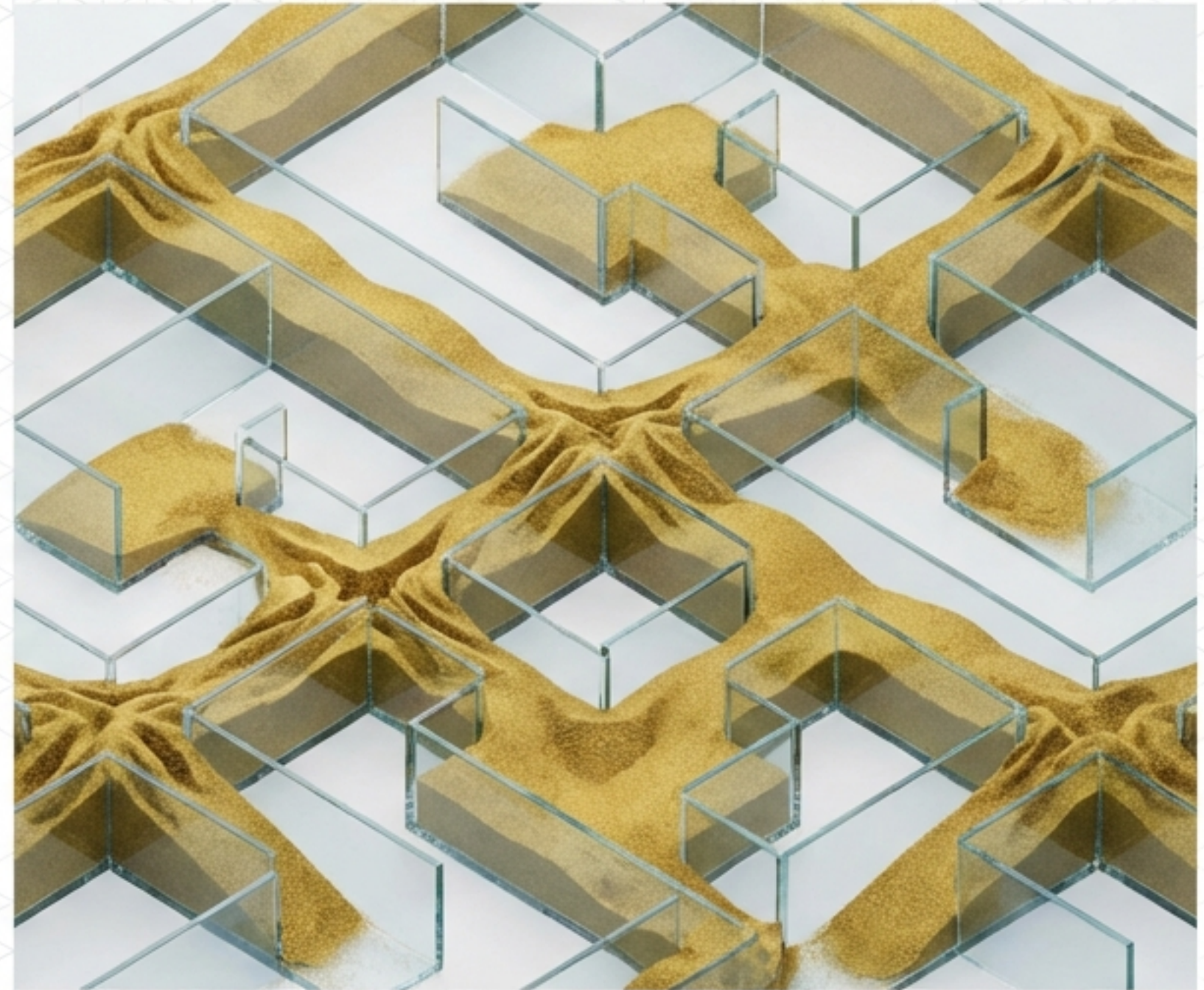
Was passiert, wenn der Raum nicht flach ist, sondern aus einem Netzwerk von Kanten und Knoten besteht?

Das Modell:

Stellen Sie sich ein Labyrinth aus hohen Glaswänden vor. Wir füllen Sand in die Zwischenräume.

An den **Verzweigungsknoten** wird Sand zwischen den angrenzenden Kanten ausgetauscht.

An den **Randknoten** rieselt der Sand ab ($u = 0$).



Die mathematische Herausforderung: Der Knoten

Auf den Kanten (glatten Kurven) gilt die klassische Eikonalgleichung $|u'| = 1$.

Das Problem:

Am Verzweigungsknoten ist der Gradient Du klassisch nicht definiert.
Wie interagieren die Lösungen der verschiedenen Kanten?

Klassische Lösungen existieren nicht. Wir benötigen ein Konzept für **schwache Lösungen**.



Historischer Kontext: Viskositätslösungen

Die Idee: Anstatt die Funktion direkt abzuleiten (was an Spitzen unmöglich ist), nutzen wir glatte **Testfunktionen**, die den Graphen von oben oder unten berühren.

Dieses Konzept erlaubt Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise für nicht-differenzierbare Funktionen.



1975

S.N. Kružkov: Verallgemeinerte Lösungen für Eikonal-Eikonal-Gleichungen.



1981

Crandall & Lions: Einführung der 'Viscosity Solutions'.



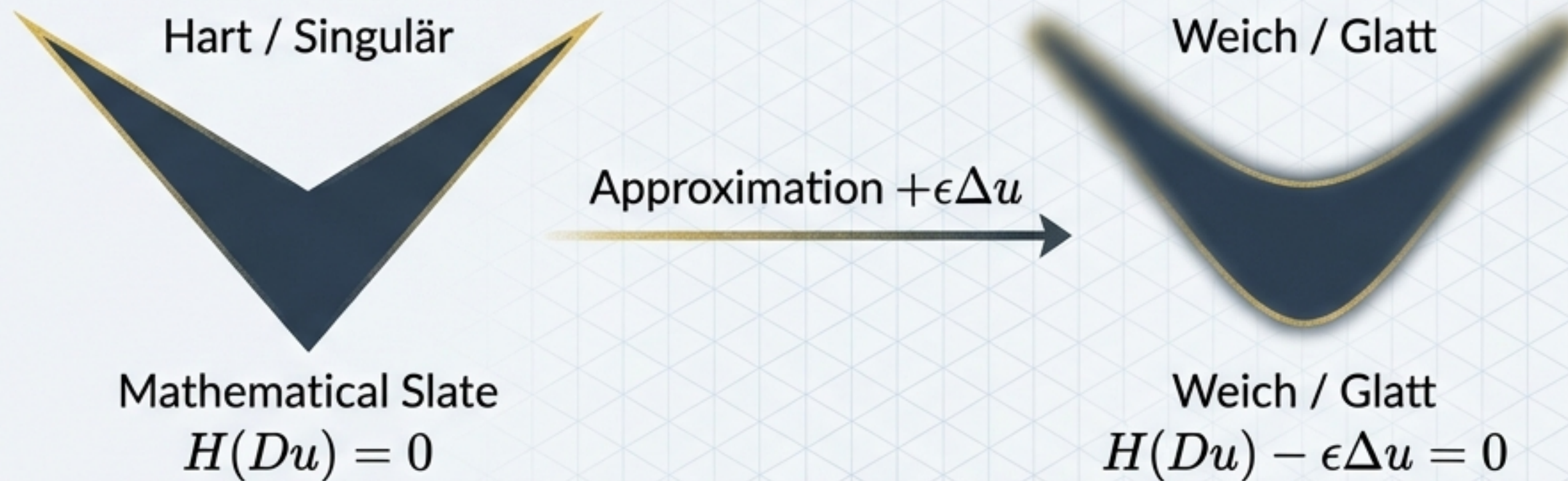
2006

Schieborn: Viskositätslösungen auf Netzwerken.



Die Methode der verschwindenden Viskosität

Um das singuläre Verhalten am Knoten zu beherrschen, approximieren wir die Gleichung. Wir fügen einen "Viskositätsterm" $\epsilon \Delta u$ hinzu (analog zur Zähigkeit in Fluiden oder Diffusion).

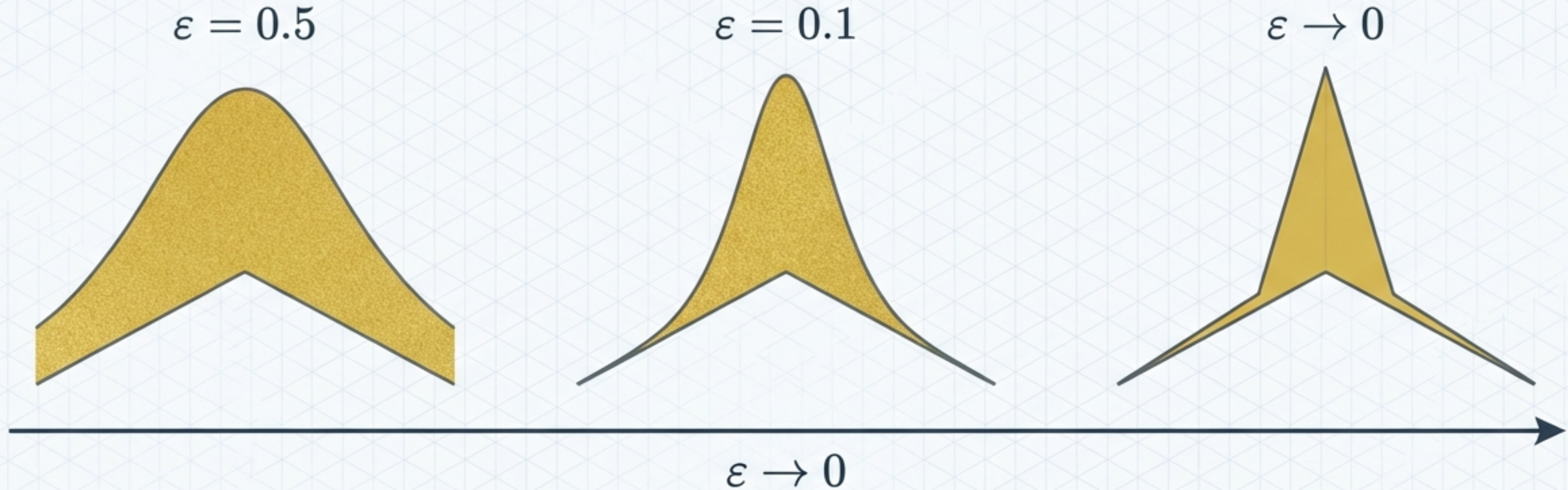


Das Verfahren:

1. Löse das glatte Problem für $\epsilon > 0$.
2. Lasse $\epsilon \rightarrow 0$ gegen Null gehen ("Vanishing Viscosity").

Die resultierende Grenzfunktion ist der Kandidat für die physikalisch korrekte Lösung.

Konvergenz auf Netzwerken



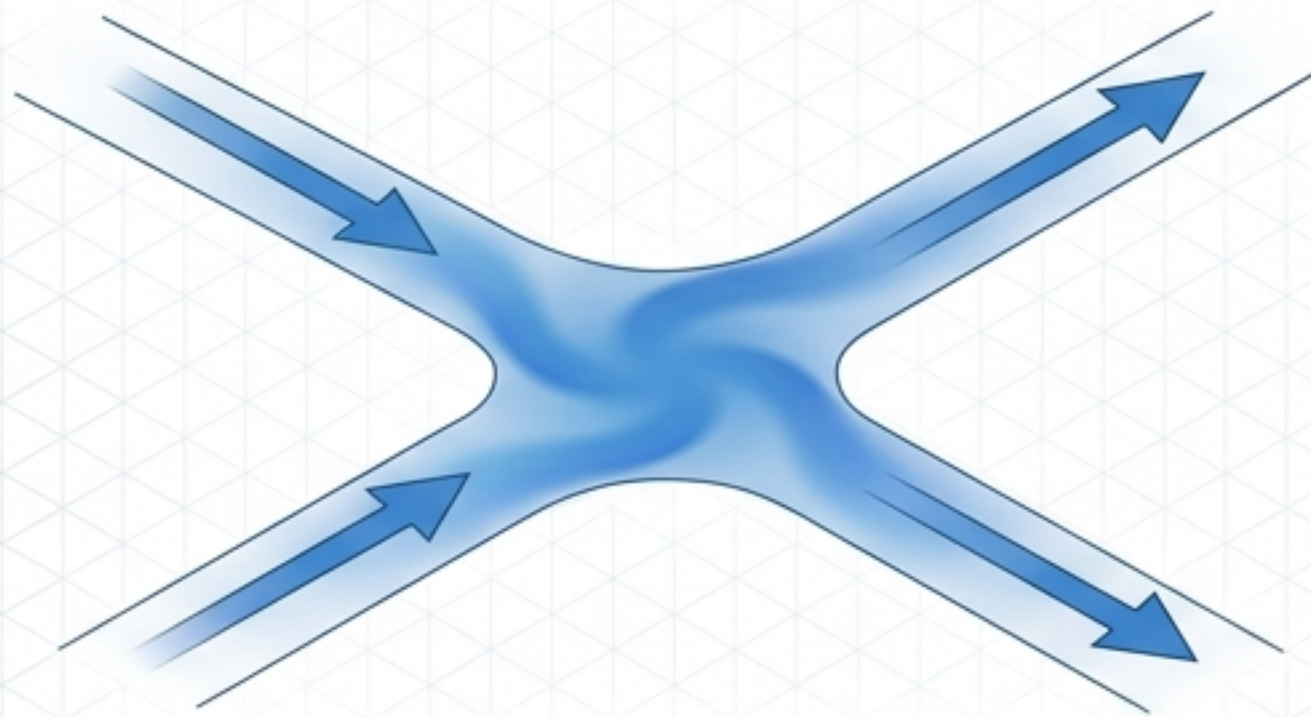
Es kann gezeigt werden, dass die Familie der approximierten Lösungen u_ϵ für $\epsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion u konvergiert.

Voraussetzung: Die Hamilton-Funktion muss isotrop sein (richtungsunabhängig).

Das Verfahren liefert eine eindeutige Grenzfunktion.

Die kritische Transformation am Knoten

Approximation ($\epsilon > 0$)



Kirchhoff-Bedingung: Summe der Flüsse = 0 (Mittelwert)

Limit ($\epsilon = 0$)

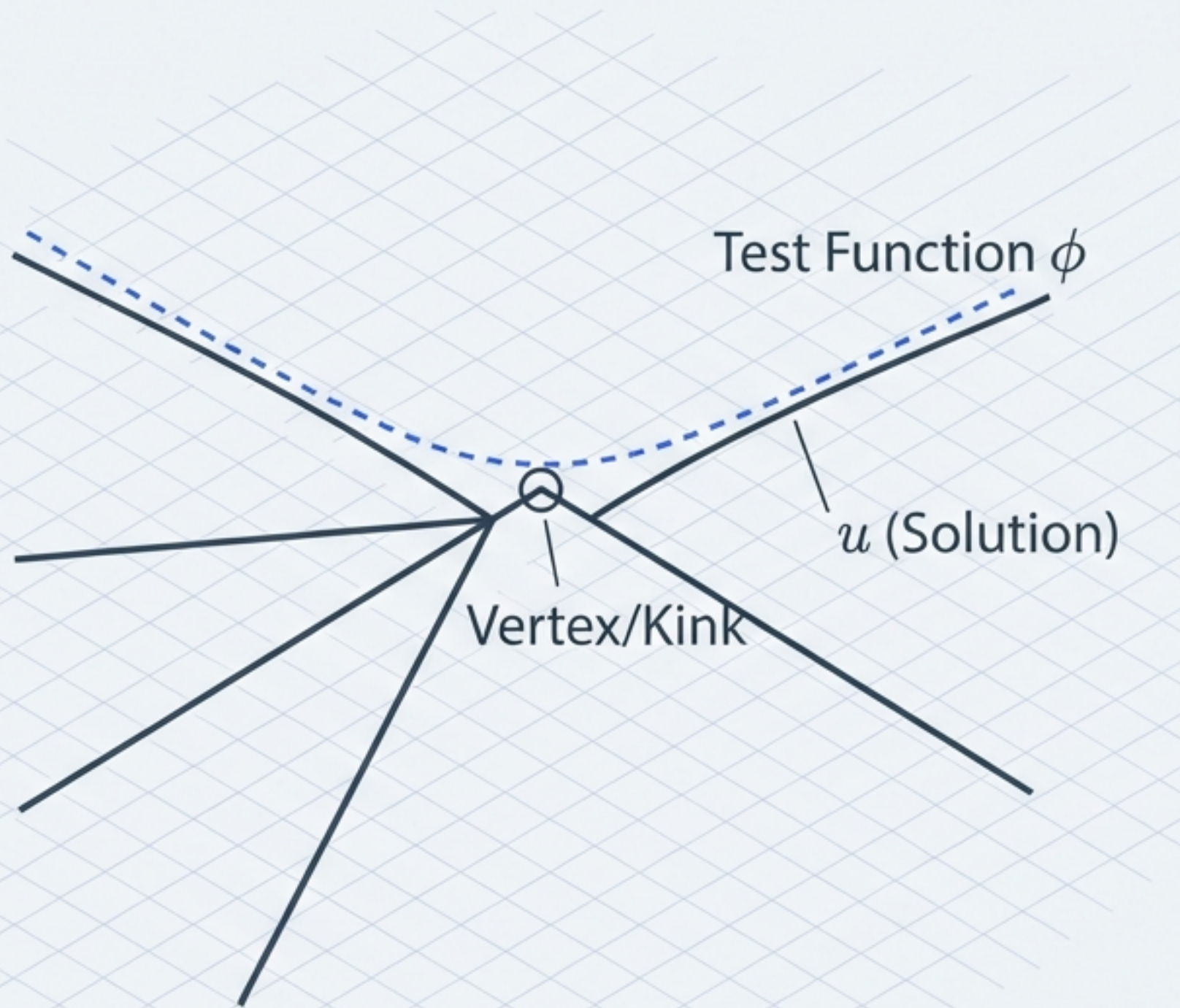


Viskositäts-Bedingung: Min/Max Selektionsprinzip

Während der Approximation ($\epsilon > 0$): Es gilt die klassische **Kirchhoff-Bedingung**. Die Summe der Flüsse am Knoten ist Null. Dies wirkt wie eine "Mittelwertbildung".

Im Limit ($\epsilon \rightarrow 0$): Die Mittelwert-Eigenschaft geht verloren. Es entsteht ein **Selektionsprinzip**: Die Lösung wird durch den kürzesten Pfad zum Rand bestimmt. Dies ist die Geburtsstunde der "Viskositätslösung" auf dem Netzwerk.

Definition: Viskositätslösungen auf Netzwerken



Eine Funktion u ist eine Viskositätslösung, wenn sie für jede glatte Testfunktion ϕ , die u berührt, eine Differentialungleichung erfüllt.

Am Knoten:

- **Sublösung:** Die Bedingung muss für alle Paare von inzidenten Kanten erfüllt sein.
- **Superlösung:** Es muss für jede Kante mindestens eine andere Kante geben ('feasible index'), die den Fluss ermöglicht.

Dies spiegelt die Logik wider: "Es gibt immer einen Weg zum Rand."

Eindeutigkeit und das Vergleichsprinzip

Randbedingung: $u \leq v$ auf $\partial\Gamma$



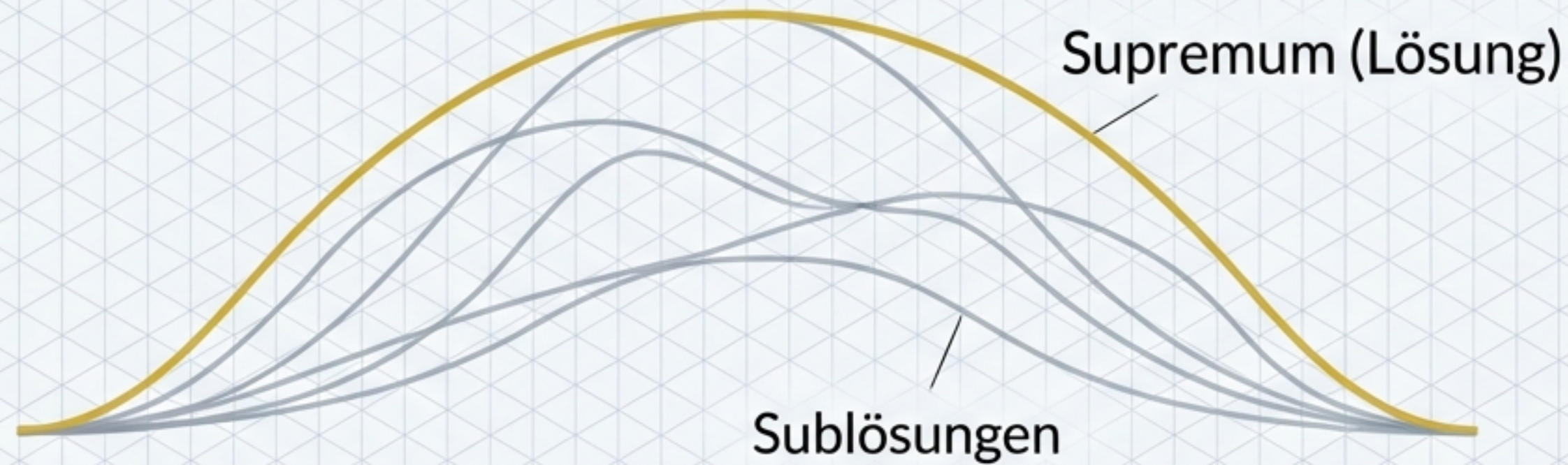
Folgerung: $u \leq v$ auf ganz Γ

Die Definition ist stark genug, um Eindeutigkeit zu garantieren.

Vergleichsprinzip: Wenn eine Sublösung u am Rand kleiner ist als eine Superlösung v , dann gilt $u \leq v$ im gesamten Netzwerk.

Daraus folgt direkt: Es kann höchstens eine Viskositätslösung geben.
Dies löst das Problem der Nichteindeutigkeit klassischer Lösungen.

Existenz durch die Perron-Methode



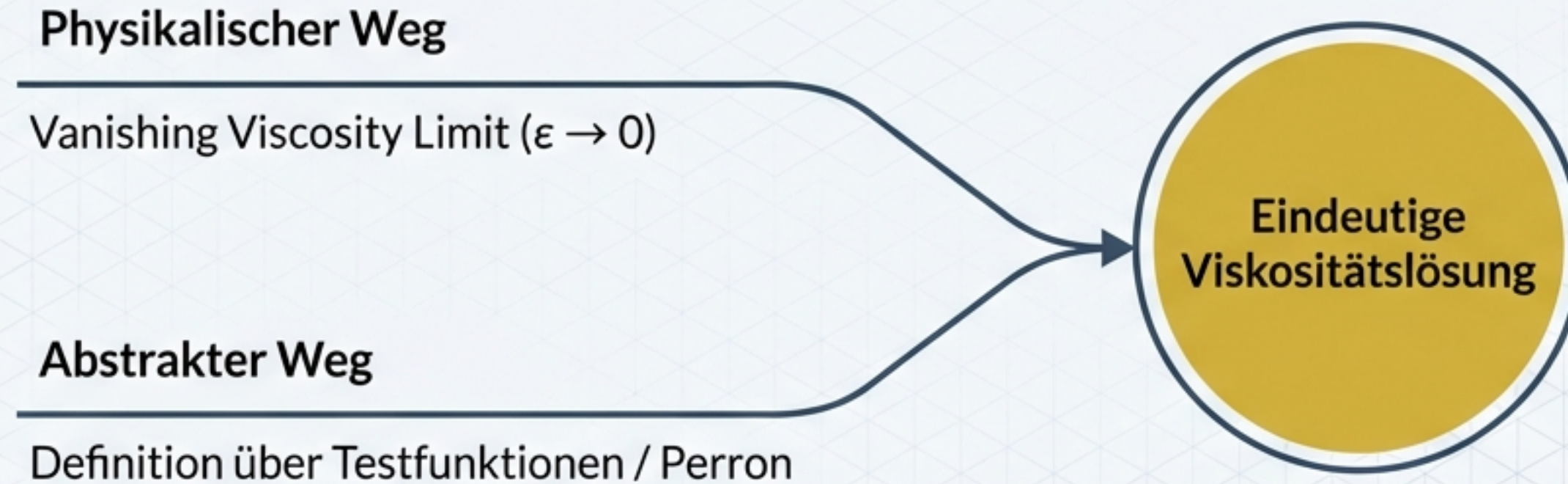
Wie konstruiert man die Lösung?

Wir nutzen die **Perron-Methode**: Die Lösung ist das Supremum (die obere Einhüllende) aller zulässigen Sublösungen.

- **Das Werkzeug:** SHE-Funktionen (*Subharmoneikonal*). Diese Funktionen kombinieren Eigenschaften von subharmonischen (Laplace) und subeikonalen Funktionen.

Ergebnis: Die konstruierte Funktion ist tatsächlich die gesuchte Viskositätslösung.

Konsistenz der Theorie



Wir haben zwei Wege beschritten:

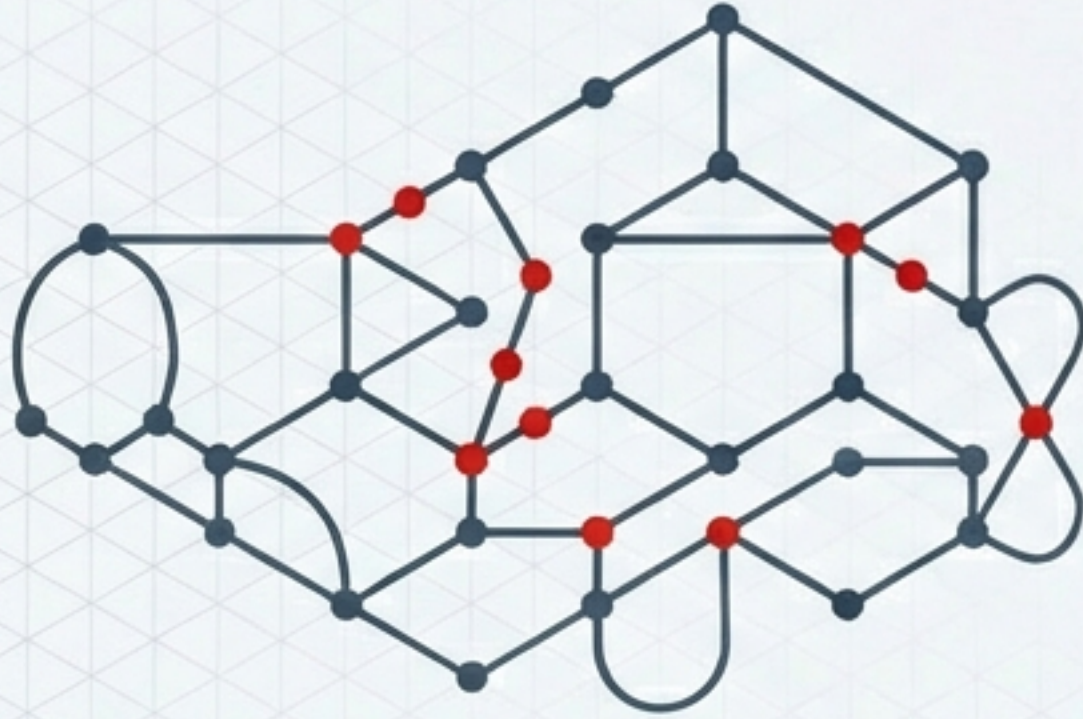
1. Den physikalischen Weg (Grenzwert der Approximation).
2. Den abstrakten Weg (Definition über Testfunktionen).

Das Resultat: Beide Konzepte sind konsistent.

Jede durch *Vanishing Viscosity* erhaltene Grenzfunktion ist eine Viskositätslösung im Sinne unserer Definition.

Das "Sandhaufen-Modell" im Labyrinth ist mathematisch exakt gelöst.

Singularitäten und Topologie



$$N_{\text{sing}} \sim \text{Cycle Rank}$$

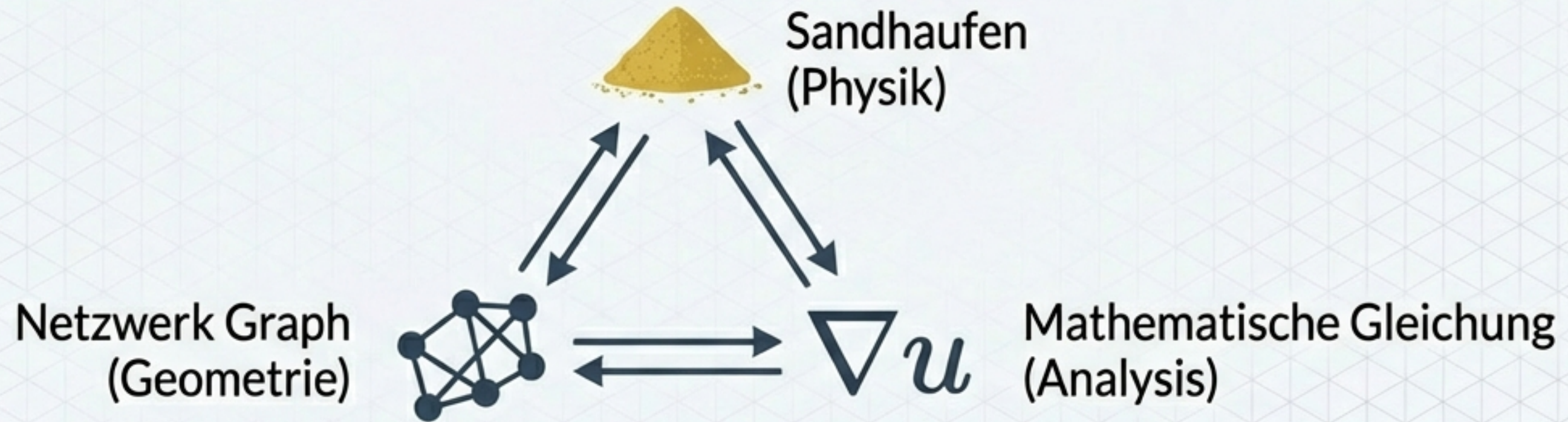
Die Struktur der Lösung verrät uns etwas über den Raum.

Die Anzahl der **Singularitäten** (Knicke im Sandhaufen) ist keine zufällige Größe.

Sie hängt von der Topologie des Netzwerks ab, speziell vom **Zyklischen Rang** (Anzahl der "Löcher" oder Kreise im Graphen).

Die Geometrie der Lösung spiegelt die Topologie des Netzwerks wider.

Zusammenfassung: Vom Sandhaufen zur Analysis



Transfer: Erfolgreiche Übertragung der Theorie der Viskositätslösungen auf verzweigte Räume (Netzwerke).

Methode: Validierung durch *Vanishing Viscosity* und Perron-Methode.

Ergebnis: Existenz und Eindeutigkeit sind gesichert.

Ausblick: Diese Theorie bildet das Fundament für die Behandlung komplexer Interaktionsprobleme und granularer Materie auf Graphen.